2 Vektor tangente

Neka je kriva L u prostoru zadana parametarski na sljedeći način

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases}$$

(u skalarnom obliku) i neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj L. Ako je tačka M_0 dobijena za vrijednost $t = t_0$ vektor tantgente u tački M_0 se računa po formuli $\vec{t} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$t: \frac{x - x_0}{t_1} = \frac{y - y_0}{t_2} = \frac{z - z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$ vektor tangente u tački M_0.

14. Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \frac{t}{2}$ u tački $M_0(t = \frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

[$\frac{x - a(\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \frac{y - a}{1} = \frac{z - 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\pi}{4}$ rad]

15. Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ u tački $M_0(t = 1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom. [$\frac{x-e}{e} = \frac{y - e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{z-1}{2}$; $\arccos \frac{e}{\sqrt{e^2 + e^{-2} + 4}}$]

16. Naći ugao između tangente na krivu

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \\ z &= bt \end{aligned}$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira. [$\measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \arccos \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}$]

17. U kojim tačkama krive $L: x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ je tangenta krive paralelna ravni $3x + y + z + 2 = 0$? [$M_1(-2, 3, -4)$; $M_2(-2, 12, 14)$]

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

tada se vektor tangente određuje formulom

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$$

18. Data je kriva $\vec{r} = \left\{\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\right\}$. Pokazati da je ugao između tangente i vektora položaja dodirne tačke prav. [$\vec{r} \cdot \vec{t} = 0$]

19. Data je kriva $\vec{r} = a \cos t \, \vec{i} + a \sin t \, \vec{j} + az(t) \vec{k}$. Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan $x0y$ u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = R^2$.

[$z = ae^{ut}$ gdje je $u = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2 - a^2}}$]

20. Dokazati da kriva

$$x = e^t \cos t$$
$$y = e^t \sin t$$
$$z = e^t$$

siječe izvodnicu konusa na kojem kriva leži pod konstantnim uglom.

$[\vec{t} \cdot \vec{r} = 2e^{2t};\ \measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}]$

21. Vektor tangente $\vec{t} = \frac{1}{2t^2+9}(9, 6t, 2t^2)$ zaklapa isti ugao sa konstantnim pravcem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gdje su $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $|\vec{p}| = 1$) bez obzira na vrijednost t. Odrediti pravac $\vec{p}$.

$[\vec{p}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}});\ \vec{p}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})]$

> Ako je kriva L data u implicitnom obliku
>
> $$L : \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$
>
> tada je najlakši način da odredimo vektor tangente je da prvo parametrizujemo krivu. Međutim, ako smo u nemogućnosti parametrizirati krivu, vektor tangente se može izračunati na sljedeći način
>
> $$\vec{t} = \left(\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right)$$
>
> (gdje su svi parcijalni izvodi izračunati u tački M_0).

22. Dokazati da tangente na krivu $C : \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ obrazuju konstantan ugao sa pravcem koji ima vektor pravca $\vec{a} = (1, 0, 1)$. $[\measuredangle(\vec{t}, \vec{a}) = \frac{\pi}{4}]$

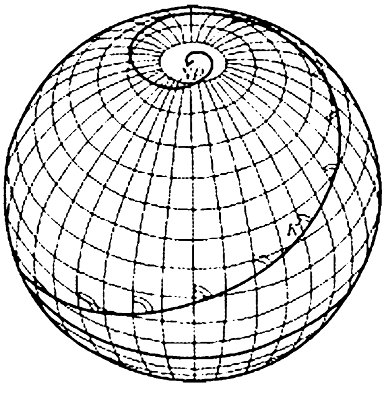
23. Pokazati da tangente krive

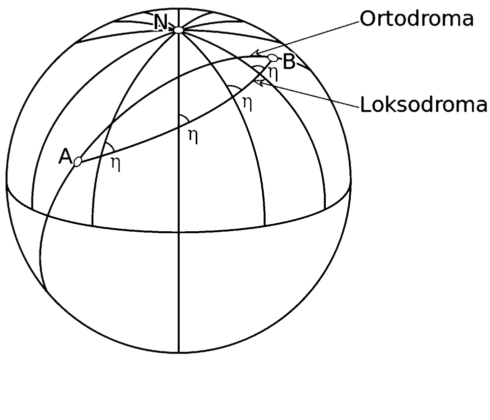
$$C : \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$$

obrazuju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Naći taj pravac i taj ugao.

$[1^\circ\ \vec{p}_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \frac{\pi}{4}$ rad; $2^\circ\ \vec{p}_0 = (\frac{1}{-\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \frac{3\pi}{4}$ rad$]$

24. Kriva koja se naziva loksodroma određena je jednačinom $\phi = a \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$, čiji je prvi izvod po teti $\frac{-a}{\cos\theta}$, gdje je θ geografska širina a ϕ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona siječe merdijane sfere pod uglom α tako da je $\operatorname{tg}\alpha = a$. [koncentrični krugovi - geogr. širina]





(#) Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=4a\sin\frac{t}{2}$ u tački $M_0(t=\frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Rj: Za $t=\frac{\pi}{2}$ iz datog sistema f-ja dobijamo da je

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(1-0) = a$$

$$z_0 = z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4a\sin\frac{\pi}{4} = 2a\sqrt{2}$$

pa je $M_0\left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right), a, 2a\sqrt{2}\right)$

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$

tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

gdje je $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)\neq 0$ $(\vec{a}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)))$ vektor tangente.

$x' = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$, $z' = 4a\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2a\cos\frac{t}{2}$

$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $z'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,a$

$$\Rightarrow \frac{x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z-2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ jednačina tražene tangente

Odredimo ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

Vektor tangente u tački M_0 je $\vec{t}=(1,1,\sqrt{2})$.
z-osa ima vektor pravca $\vec{p}=(0,0,1)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}||\vec{t}|\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{p}|=1,\quad |\vec{t}|=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ugao između tangente i z-ose je $\frac{\pi}{4}$ rad.

\# Odrediti jednačinu tangente krive $L: x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=t^2$ u tački $M_0(t=1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom.

Rj.:

Za $t=1$ iz jednačine krive L dobijamo

$$x_0=e$$
$$y_0=e^{-1}$$
$$z_0=z(1)=1$$

pa tražimo jednačinu tangente krive L u tački $M_0(e, e^{-1}, 1)$.

Prisjetimo se

Ako tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \\ t\in I \end{cases}$ tada jednačina tangente na krivu L u tački M_0 glasi

$$\frac{x-x_0}{t_1}=\frac{y-y_0}{t_2}=\frac{z-z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t}=(t_1, t_2, t_3)$ vektor tangente ($\vec{t}=\dot{\vec{r}}$).

$$\begin{aligned} \dot{x}&=e^t \\ \dot{y}&=-e^{-t} \\ \dot{z}&=2t \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{x}(1)&=e \\ \dot{y}(1)&=-e^{-1} \\ \dot{z}(1)&=2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \vec{t}=(e, e^{-1}, 2)$$

Jednačina tangente u tački M_0 je $\dfrac{x-e}{e}=\dfrac{y-e^{-1}}{e^{-1}}=\dfrac{z-1}{2}$.

Da bi odredili ugao između tangente i x-ose, mi u stvari trebamo odrediti ugao između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora pravca x-ose $\vec{p}=(1,0,0)$

$$\vec{p}\cdot\vec{t}=|\vec{p}|\cdot|\vec{t}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{t})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{t}}{|\vec{p}||\vec{t}|}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{t} = (1,0,0)\cdot(e, e^{-1}, 2) = e$$

$$|\vec{n}| = 1$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^2 + e^{-2} + 4}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{n}, \vec{t}) = \frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

$$\sphericalangle(\vec{n}, \vec{t}) = \arccos\frac{e}{\sqrt{e^2+e^{-2}+4}}$$

traženi ugao.

(#) Naći ugao između tangente na krivu

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$z = bt$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira.

Rj.

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadana jednačinom $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, ili u parametarskom obliku $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ vektor tangente određujemo formulama:

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} \qquad \left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

Vektor tangente na datu krivu u tački t je

$$\vec{t} = (-a\sin t, a\cos t, b).$$

Primetimo da nije data konkretno neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj tražimo tangentu na krivoj. Zbog ovoga, promjenjivu t možemo tumačiti fiksiranom. Ugao između tangente na krivu i vektora $\vec{r}$ je jednak uglu između vektora tangente $\vec{t}$ i vektora $\vec{r}$.

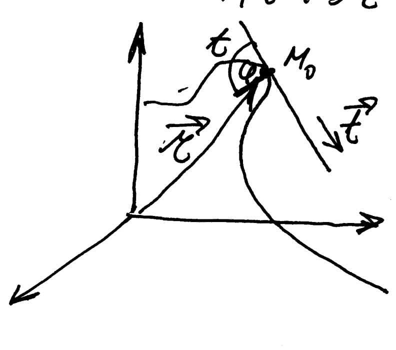
Vektor $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira t izgleda

$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

Znamo $\vec{t} \cdot \vec{r} = |\vec{t}||\vec{r}| \cos\sphericalangle(\vec{t}, \vec{r})$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t}, \vec{r}) = \frac{\vec{t} \cdot \vec{r}}{|\vec{t}||\vec{r}|} = \frac{-a^2\sin t\cos t + a^2\sin t\cos t + b^2 t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2 t^2}}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t}, \vec{r}) = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}$$



(#) U kojim tačkama krive $L: x=3t-t^3,\ y=3t^2,\ z=3t+t^3$ je tangenta krive paralelna ravni $3x+y+z+2=0$?

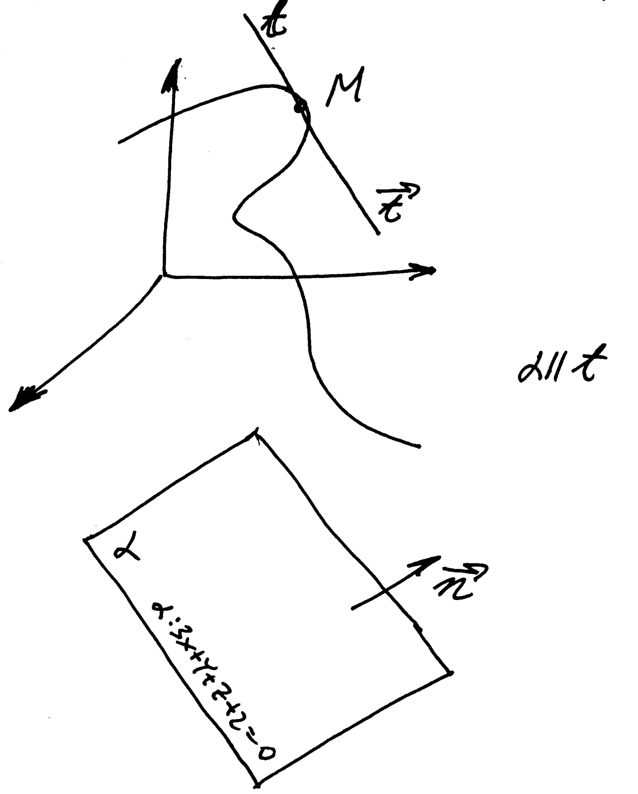
Upute:

Vektor tangente u proizvoljnoj tački je oblika
$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2),$$
pa za vektor tangente možemo uzeti vektor $\vec{t}=(1-t^2, 2t, 1+t^2)$.

Vektor normale date ravni je
$$\vec{n}=(3,1,1)$$

Da bi tangente krive bile paralelne ravni neophodno je $\vec{t}\perp\vec{n}$ tj. $\vec{t}\cdot\vec{n}=0$, što daje jednačinu
$$t^2-t-2=0.$$

Odavde je $t=-1$ ili $t=2$. Za $t=-1$ imamo tačku krive
$$M_1(-2,3,-4)$$
a za $t=2$ tačku
$$M_2(-2,12,14).$$



(#) Data je kriva $\vec{r} = \{\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\}$.

Pokazati da je ugao između tangente i vektora položaja dodirne tačke prav.

Rj.

Vektor pravca tangente je $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$.

$$\vec{t} = \ldots = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

Vektor položaja dodirne tačke je

$$\vec{r} = (\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\}.$$

$$\vec{r}\cdot\vec{t} = -\sin 2t \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin 2t \cos 2t + \sin t \cos t =$$

$$= -(2\sin t \cos t)\cos^2 t + \frac{1}{2}(2\sin t \cos t)(\cos^2 t - \sin^2 t)$$
$$+ \sin t \cos t =$$

$$= -2\sin t \cos^3 t + \sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos t$$

$$= -\sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t + \sin t \cos t$$

$$= -\sin t \cos t\,(\cos^2 t + \sin^2 t - 1) = 0$$

$\vec{r}\cdot t = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{t} \Rightarrow$ ugao između tangente i dodirne tačke je prav

(#) Data je kriva $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + a\,z(t)\,\vec{k}$.
Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan xOy u tačkama kružnice $x^2+y^2=R^2$.

Rj. $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, a\,z(t)) \Rightarrow$ za $t=0$ imamo $A(a, 0, a z(0))$.

Tačka $A(a,0,a)$ leži na krivoj, pa iz $a z(0) = a$ slijedi $z(0)=1$.

Primjetimo da je jednačina tangente

$$\frac{x - a\cos t}{-\sin t} = \frac{y - a\sin t}{\cos t} = \frac{z - a z(t)}{z'} \quad (=k)$$

Odredimo prodor tangente kroz ravan xOy

$$x - a\cos t = -k\sin t$$
$$y - a\sin t = k\cos t$$
$$z - a z(t) = k z'$$

$$x = -k\sin t + a\cos t$$
$$y = k\cos t + a\sin t$$
$$z = k z' + a z(t)$$

Za $k = -a\dfrac{z}{z'}$ demo dobiti da je $z=0$.
Prema tome prodor tangente kroz ravan xOy ima koordinate

$$Z = 0$$
$$X = a\frac{z}{z'}\sin t + a\cos t$$
$$Y = -a\frac{z}{z'}\cos t + a\sin t$$

Iz uslova $R^2 = X^2 + Y^2 = a^2\dfrac{z^2}{z'^2} + a^2$

dobija se $\dfrac{z^2}{z'^2} = \dfrac{R^2 - a^2}{a^2}$ tj. $\dfrac{z'}{z} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2}{R^2-a^2}}$, dakle

$$\ln|z| = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t + \ln|C|.$$

Znači

$$z = Ce^{ut}, \quad \text{gdje je} \quad u = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}.$$

No imali smo $z=a$ za $t=0$ (vidi točku $(a;0;a)$)

pa je $a=C$ tj.

$$z = a\,e^{\pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t} = a\,e^{ut},$$

traženo rješenje

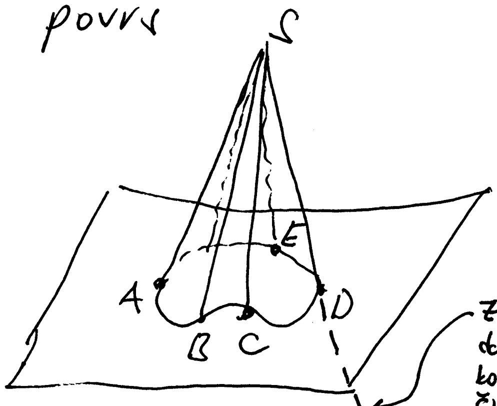
\# Dokazati da kriva

$$x = e^t \cos t$$
$$y = e^t \sin t$$
$$z = e^t$$

siječe izvodnicu konusa na kojem kriva leži, pod konstantnim uglom.

Rj.

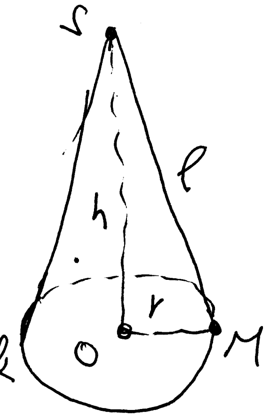
izvodnica (generatrisa) - prava koja pri svom kretanju siječe datu liniju i pri tom formira (opisuje) pravolinijsku površ



zamislite da ovaj konac čiji je kraj tačka S, pomjeramo po krivoj

primjer konusa

$p(S,A)$, $p(S,E)$, $p(S,D)$, $p(B,S)$, $p(C,S)$ su izvodnice



primjer kružnog konusa (osnova konusa je krug)

SM primjer izvodnice konusa

jednačine konusa

$$x^2+y^2=z^2$$
$$x^2+z^2=y^2$$
$$y^2+z^2=x^2$$
$$\vdots$$

Pronađimo prvo jednačinu konusa na kojem kriva leži.

$$x^2+y^2=(e^t\cos t)^2+(e^t\sin t)^2=e^{2t}=z^2$$

$x^2+y^2=z^2$ ovo je jednačina kružnog konusa čije je tjeme u koordinatnom početku a osa simetrije je z-osa

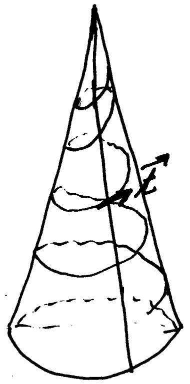
Obilježimo sa $\vec{t}$ vektor tangente na krivu u nekoj tački M.

vektor tangente određujemo formulom

$$\vec{t}=\dot{\vec{r}} \quad \left(\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$\vec{t} = (e^t\cos t + e^t(-\sin t),\ e^t\sin t + e^t\cos t,\ e^t)$$

$$= (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t)$$



Obilježimo sa $\vec{r}$ vektor položaja tačke M

$$\vec{r} = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$$

Znamo

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = |\vec{t}|\,|\vec{r}|\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r})$$

Zbog činjenice da je vrh konusa u tjemenu koordinatnog početka ugao $\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r})$ treba da bude konstantan (tim dokazom bi završili zadatak):

$$|\vec{t}| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} =$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t\sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + \cos^2 t + 1)}$$

$$= e^t\sqrt{3}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{r} = e^{2t}(\cos^2 t - \cos t\sin t) + e^{2t}(\sin^2 t + \cos t\sin t) + e^{2t}$$

$$= 2e^{2t}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{r}}{|\vec{t}|\,|\vec{r}|} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{3}\,e^t\cdot\sqrt{2}\,e^t} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

time je tvrdnja zadatka dokazana.

(#) Vektor tangente $\vec{t} = \frac{1}{2t^2+9}(9, 6t, 2t^2)$ zaklapa isti ugao sa konstantnim pravcem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gdje je $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $|\vec{p}| = 1$) bez obzira na vrijednost t. Odrediti pravac $\vec{p}$.

Upute:

$|\vec{t}| = 1$

$|\vec{p}| = 1$ $\qquad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{p} = ?$ tj. $p_1 = ?, p_2 = ?, p_3 = ?$

$$\vec{t} \cdot \vec{p} = |\vec{t}| \cdot |\vec{p}| \cdot \underbrace{\cos \overbrace{\sphericalangle(\vec{t}, \vec{p})}^{=\alpha}}_{=c} = c$$

$$\vec{t} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2t^2+9}(9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_3) = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2 p_2 = c(2t^2+9)$$

$$(2p_3 - 2c)t^2 + 6p_2 t + 9(p_1 - c) = 0$$

$$p_3 = c, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = c$$

$|\vec{p}| = 1$, $\quad \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2c} = 1$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{p}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(#) Dokazati da tangente na krivu $C : \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ obrazuju konstantan ugao sa pravcem koji ima vektor pravca $\vec{a} = (1,0,1)$.

Rj. Napišimo jednačinu krive C u parametarskom obliku $x = t \Rightarrow 3y = t^2$

$$y = \frac{1}{3}t^2 \qquad z = \frac{2}{9}xy$$

$$z = \frac{2}{9}t \cdot \frac{1}{3}t^2$$

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}t^2 \\ z = \frac{2}{27}t^3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$
vektor tangente

Posmatrajmo vektor $\vec{a} = (1,0,1)$ i obilježimo sa α ugao između $\vec{t}$ i $\vec{a}$.

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = |\vec{t}||\vec{a}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{t} \cdot \vec{a}}{|\vec{t}||\vec{a}|}$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{(2t^2+9)^2} = \frac{2}{9}t^2 + 1$$

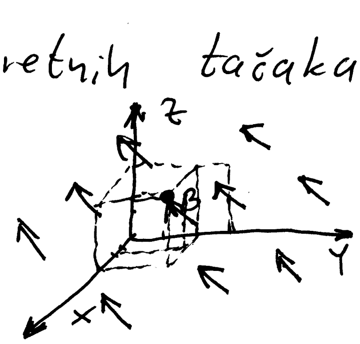
$$\vec{t} \cdot \vec{a} = 1 + \frac{2}{9}t^2$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + \frac{2}{9}t^2}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{2}{9}t^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ovo znači da svaki vektor tangente krive C zaklapa sa vektorom $\vec{a}$ ugao od $\frac{\pi}{4}$.

Navedimo primjer konkretnih tačaka koje imaju vektor pravca $\vec{a} = (1,0,1)$

$\left.\begin{matrix} A(2,2,2) \\ B(3,2,3) \end{matrix}\right\} \vec{AB} = (1,0,1)$



$\left.\begin{matrix} C(-4,2,3) \\ D(-3,2,4) \end{matrix}\right\} \vec{CD} = (1,0,1)$

$\left.\begin{matrix} E(7,-2,3) \\ F(8,-2,4) \end{matrix}\right\} \vec{EF} = (1,0,1)$

(#) Pokazati da tangente krive $C: \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$

zatvaraju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Naći taj pravac i taj ugao.

Rj. Napišimo prvo jednačinu date krive C u vektorskom obliku. Pokušajmo je parametrizirati pomoću familije ravni.

Stavimo $x = t \Rightarrow y = \frac{1}{3}t^2$

$$2 \cdot t \cdot \frac{1}{3}t^2 = 9z \Rightarrow z = \frac{2}{27}t^3$$

Prema tome $C: \vec{r} = (t, \frac{1}{3}t^2, \frac{2}{27}t^3)$.

Odredimo vektor tangente na datu krivu

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{81}t^4} = \sqrt{\frac{1}{81}}\sqrt{81 + 9 \cdot 4t^2 + 4t^4} = \frac{1}{9}\sqrt{\underbrace{4t^4 + 36t^2 + 81}_{(2t^2+9)^2}}$$

$$|\vec{t}| = \frac{1}{9}(2t^2 + 9)$$

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{(9, 6t, 2t^2)}{2t^2 + 9} \quad \text{jedinični vektor tangente}$$

Neka je $\vec{p}_0 = (p_1, p_2, p_3)$ jedinični vektor traženog pravca.

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = |\vec{t}_0||\vec{p}_0| \cos \underbrace{\sphericalangle(\vec{t}_0, \vec{p}_0)}_{\substack{\text{prema pretpostavci} \\ \text{ovo je uvijek isti ugao} \\ \text{(ovo treba biti)}}} = 1 \cdot 1 \cdot \text{constanta} = c$$

$$\vec{t}_0 \cdot \vec{p}_0 = \frac{1}{2t^2 + 9}\left[9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_3\right] = c$$

$$9p_1 + 6tp_2 + 2t^2p_3 = c(2t^2 + 9)$$

$(2p_3 - 2c)t^2 + 6p_2 t + 9(p_1 - c) = 0$

primjetimo sad da će ova jednačina identički po t biti zadovoljena akko

$p_3 = c, \quad p_2 = 0, \quad p_1 = c$

Koristeći još uslov $|\vec{p}| = 1$, dobija se $\sqrt{2c^2} = 1$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1°

$$\vec{p}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sada ako u jednačini vektora tangente $\vec{t} = (1, \frac{2}{3}t, \frac{2}{9}t^2)$ uzmemo neko konkretno $\overset{t\ \text{npr.}}{}$ $t = 3$ imamo $\vec{t} = (1, 2, 2)$

(smijemo uzeti proizvoljno t zato što sve tangente krive zatvaraju isti ugao sa pravcem $\vec{p}$)

$$\vec{t} \cdot \vec{p}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{p}_0| = 1$$

$$\cos\measuredangle(\vec{t}, \vec{p}_0) = \frac{\vec{t} \cdot \vec{p}_0}{|\vec{t}||\vec{p}_0|} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ traženi ugao

2° $\vec{p}_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\vec{t} = (1, 2, 2)$$

$$t \cdot \vec{p}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{t}| = 3$$

$$|\vec{p}_0| = 1$$

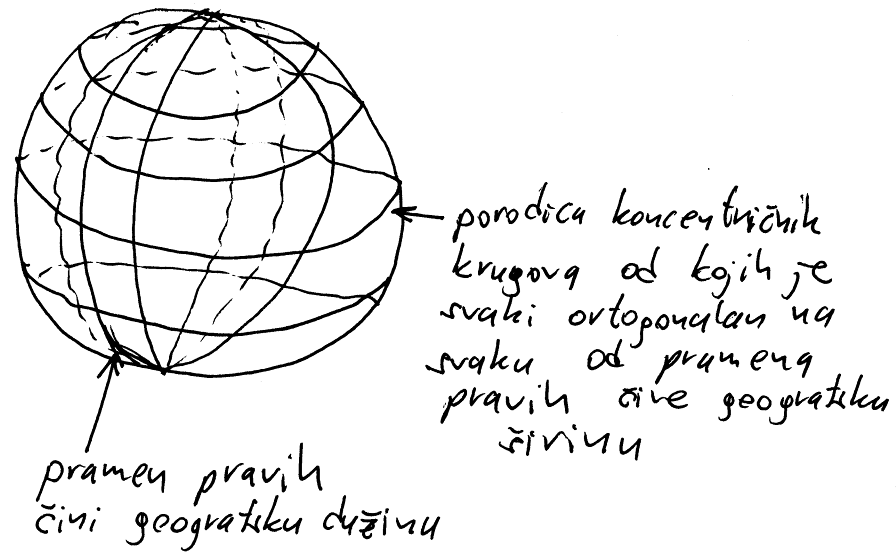
$$\cos\measuredangle(\vec{t}, \vec{p}_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ traženi ugao

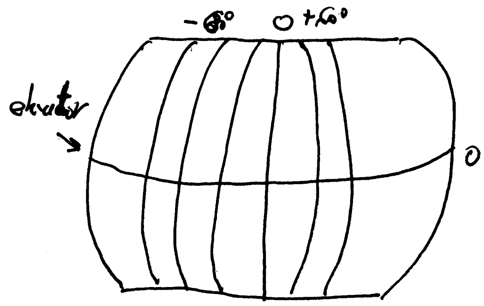
(na osnovu 1° ovo je i trebalo dobiti)

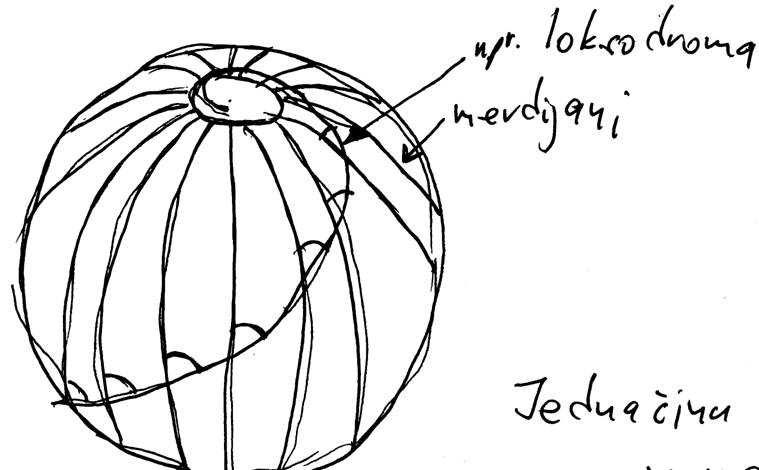
(#) Kriva koja se naziva loksodroma određena je jednačinom $\phi = a \ln tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$, čiji je prvi izvod po θ gdje je θ geografska širina a ϕ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona siječe merdijane sfere pod uglom α tako da je $tg\,\alpha = a$. (Isto tako poznato je da $\phi'(\theta) = -\frac{a}{\cos\theta}$).

Rj.



Na geografskoj karti





Po definiciji loksodroma je linija dvostruke krivine, koja leži na sferi, sferoidu ili bilo kakvoj drugoj obrtnoj površi.

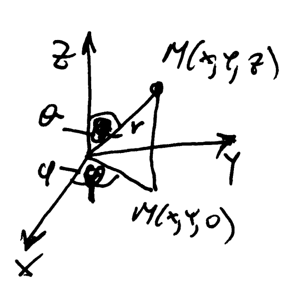
Jednačina sfere u polarnom obliku je (može biti)

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta$$

Kako je loksodroma na nekoj sferi poluprečnika r to je njena jednačina u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\cos\theta\sin\phi \\ z = r\sin\theta \\ \phi = a\ln tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

parametar je θ (r je fiksirano)



vektor tangente određujemo formulom $\vec{t} = \dot{\vec{r}}$ $\left(\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$

vektor tangente na loksodromu je

$$\vec{t} = (-r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta(-\sin\phi)\cdot\phi', -r\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\cos\phi\cdot\phi', r\cos\theta)$$

prema postavci zadatka $\phi' = -\frac{a}{\cos\theta}$

$$(-r\sin\theta\cos\phi + ra\sin\phi, -r\sin\theta\sin\phi - ra\cos\phi, r\cos\theta)$$

Jednačina merdijana sa dužinom ϕ je

$$x = r\cos\theta\cos\phi$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi$$
$$z = r\sin\theta$$

gdje je r i ϕ fiksirano, a promjenjiva je θ

Vektor tangente $\vec{t_1}$ na merdijan u proizvoljnoj tački θ je

$$\vec{t_1} = (-r\sin\theta\cos\phi, -r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = |\vec{t}||\vec{t_1}|\cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{\vec{t}\cdot\vec{t_1}}{|\vec{t}||\vec{t_1}|}$$

$$\vec{t}\cdot\vec{t_1} = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi - ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1} + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$|\vec{t}|^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi \overbrace{}^{-2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + r^2a^2\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi \overbrace{}^{+2ar^2\sin\theta\sin\phi\cos\phi} + r^2a^2\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2a^2 + r^2\cos^2\theta = r^2 + r^2a^2 \Rightarrow |\vec{t}| = r\sqrt{1+a^2}$$

Slično $|\vec{t_1}| = r \Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) = \frac{r^2}{r^2\sqrt{1+a^2}}$

$\alpha = \sphericalangle(\vec{t},\vec{t_1}) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ $\quad$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = a$ q.e.d.